Factor de forma para conducción bidimensional

En la literatura es frecuente encontrar soluciones analíticas a soluciones de interés práctico en ingeniería. En particular, el factor de forma permite calcular el calor transferido entre la superficie que se encuentra a T_1 y la superficie que se encuentra a T_2, mediante:

$$q = kS(T_1 - T_2)$$

donde S corresponde al factor de forma y el cual viene expresado en unidades de longitud.

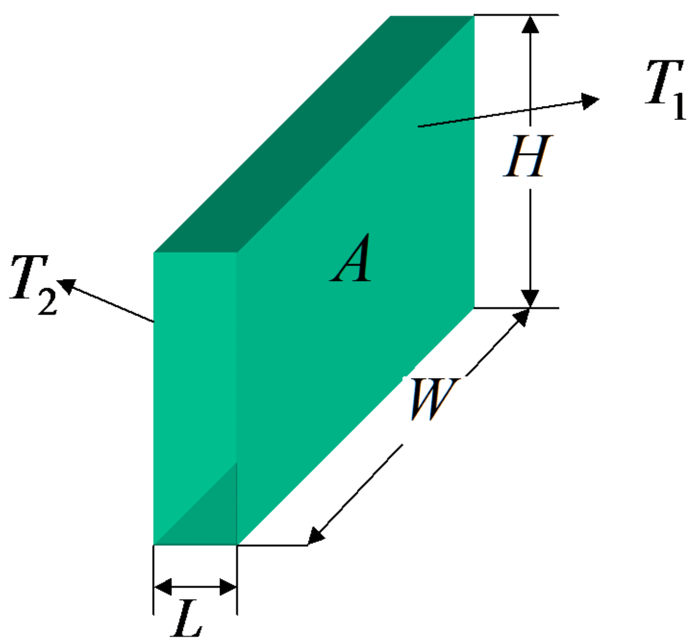
También es posible identificar una resistencia térmica para el caso en 2-D, mediante:

$$R_{2-D} = \frac{1}{SK}$$

A continuación se presenta un selecto grupo de Factores de forma:

Caso 1

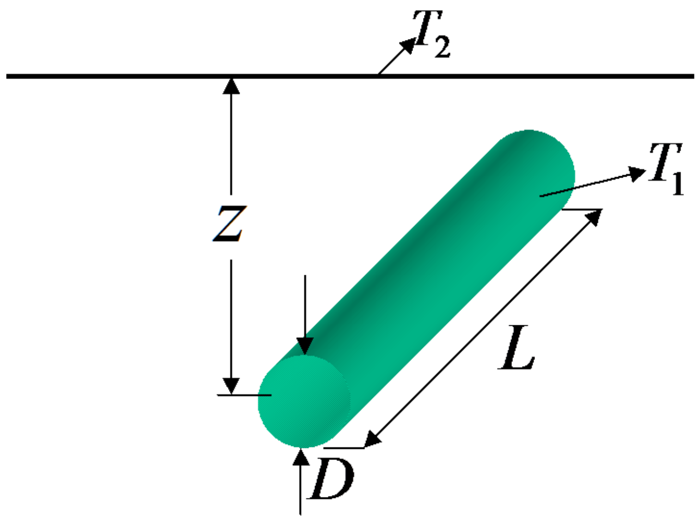
Placa plana



Restricciones: $\frac{H}{L} \geq 5$, $\frac{W}{L} \geq 5$ Factor de forma : $S = \frac{A}{L}$

Caso 2

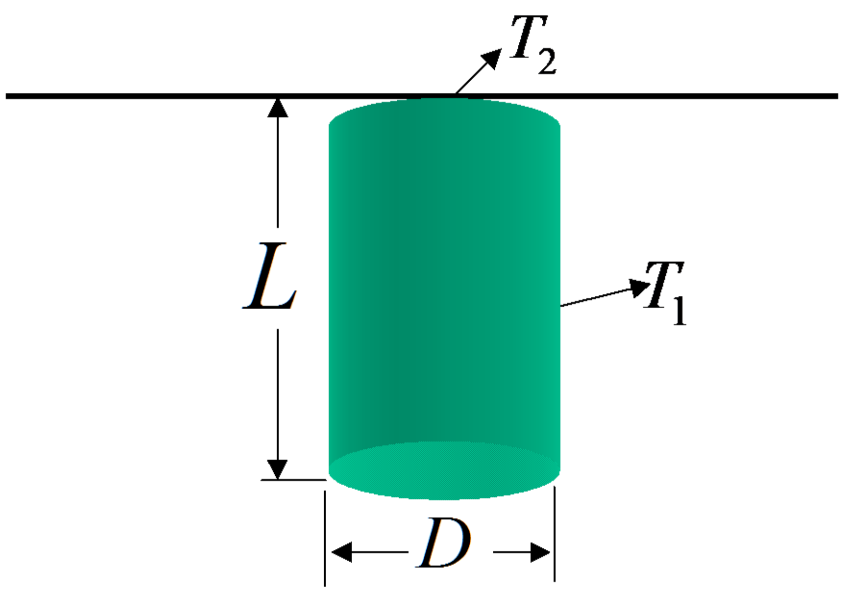
Cilindro isotérmico horizontal
inmerso en un medio seminfinito



Restricciones $L >> D$ Factor de forma: $S = 2\pi L / \cosh^{-1}(z/D)$

Caso 3

Cilindro vertical en un medio semiinfinito

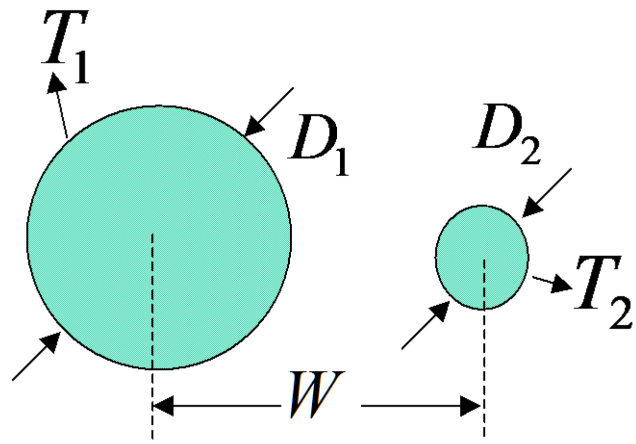


Restricciones $L >> D$

Factor de forma: $S = 2\pi L / \ln(4L/D)$

Caso 4

Conducción entre dos cilindros de longitud L en un medio infinito

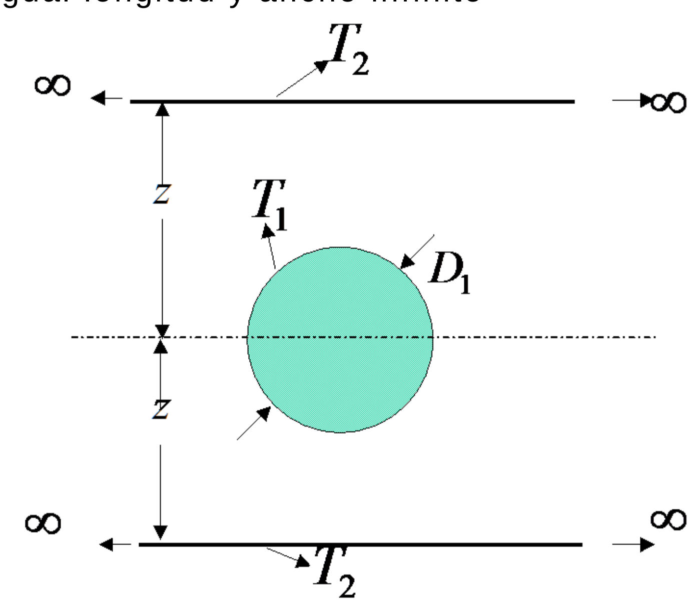


Restricciones:, $L >> D_1, D_2 b$ $L >> W$ Factor de forma :

$$S = \frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{4W^2 - D_1^2 - D_2^2}{2D_1D_2}\right)}$$

Caso 5

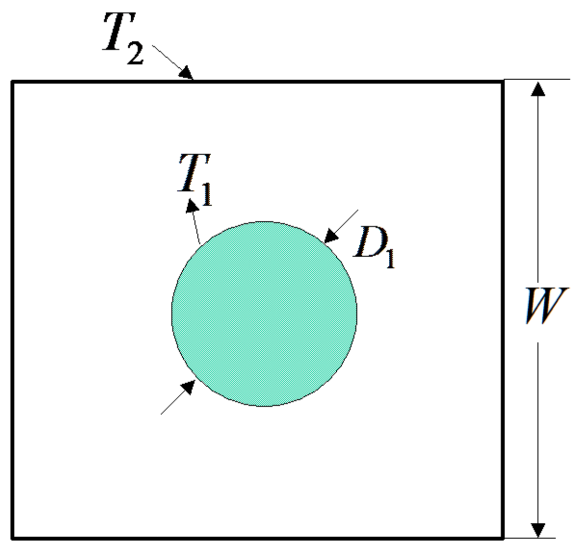
Cilindro circular horizontal de longitud L, en medio de planos paralelos de igual longitud y ancho infinito



Restricciones: $z >> D/2$, $L >> z$ Factor de forma : $S = \dfrac{2\pi L}{\ln\left(\dfrac{8z}{\pi D}\right)}$

Caso 6

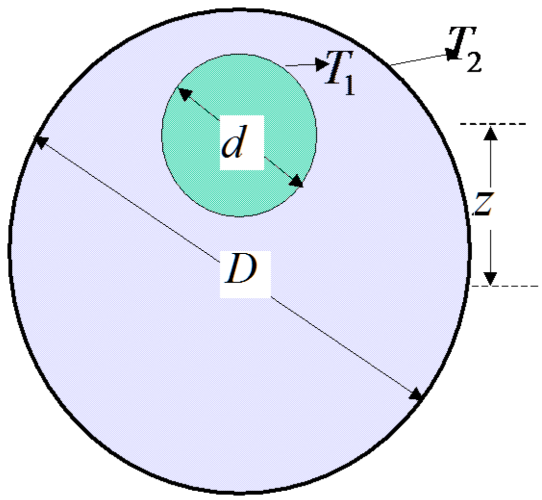
Cilindro circular horizontal de longitud L, centrado en un sólido cuadrado de igual longitud.



Restricciones: $W > D$, $L >> W$ Factor de forma : $S = \dfrac{2\pi L}{\ln\left(\dfrac{1{,}08 \cdot W}{D}\right)}$

Caso 7

Cilindro circular excéntrico

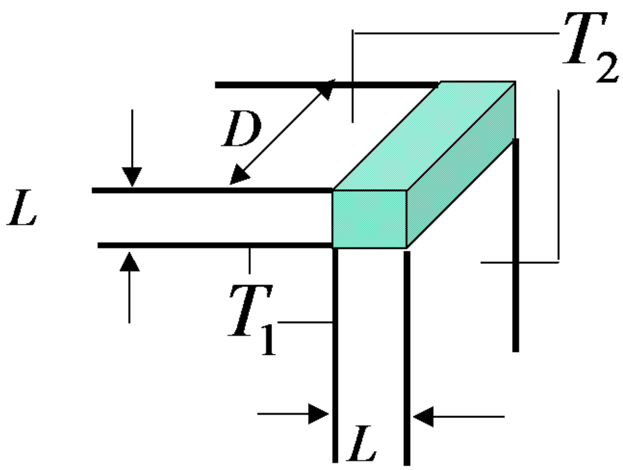


Restricciones: $D > d$, $L >> D$ Factor de forma :

$$S = \frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{D^2 + d^2 - 4z^2}{2dD}\right)}$$

Caso 8

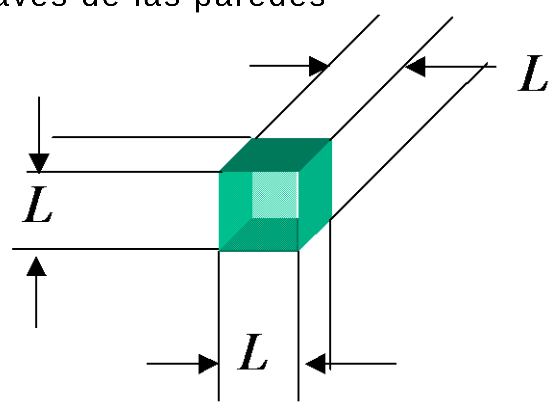
Conducción a través de la esquina de paredes contiguas



Restricciones $D > L/5$ Factor de forma ; $S = 0{,}54\,D$

Caso 9

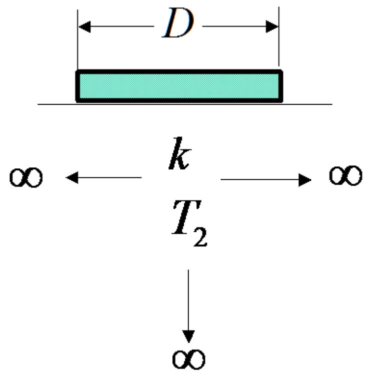
Conducción entre la esquina de tres paredes con diferencia de temperaturas a través de las paredes



Restricciones: $L \ll otras\ \dim ensiones$ Factor de forma $S = 0{,}15\,L$

Caso 10

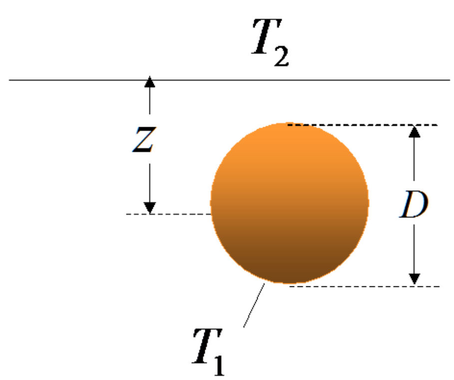
Disco de diámetro D y T_1 sobre un medio seminfinito de conductividad térmica k y T_2.



Restricción: ninguna   Factor de forma: $S = 2D$

Caso 11

Esfera inmersa en un medio seminfinito



$$S = \frac{2\pi D}{1 - D/4z}$$

Restricción z>D/2

Ejemplo:

Con relación al problema anterior. Se pide calcular el calor transferido empleando los factores de forma tabulados en la Tabla 4.1 del libro de Incropera. Comente sus resultados.

Solución:

$$q = 4k\Delta T(S_{esq} + 2S_{pared})$$

$$q = 4k\Delta T(0.54 + 2) = 101,6\frac{W}{m}$$

El resultado obtenido por vía numérica correspondió a 91,4 W/m, de manera que posee un error del 10% comparado con el cálculo realizado por factor de forma.

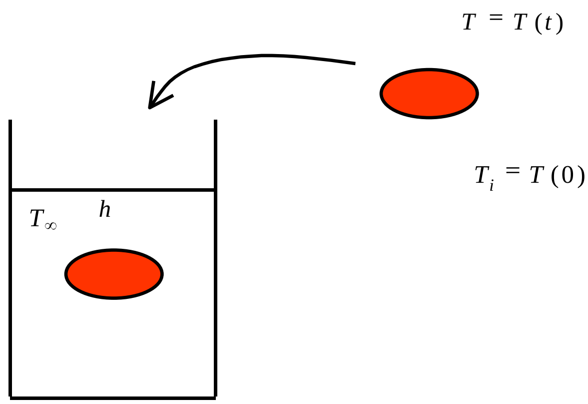
Conducción Transitoria

Muchos de los problemas más prácticos de conducción de calor no implican el flujo de calor estacionario entre dos receptáculos térmicos sino en vez de eso la repuesta transitoria a los cambios de temperatura. La calefacción de los edificios, el proceso de cocción de los alimentos, el vaciado de hierro de fundición y el tratamiento térmico de los metales (recocido, temple, revenido, etc.), todos ellos son casos en donde la tasa se cambio de la temperatura con el tiempo son importantes.

En esta sección presentaremos un análisis denominado formulación concentrada que constituye un análisis simplificado al problema de conducción transitoria.

Formulación Concentrada. Resistencia interna despreciable.

En la figura 2.20 se muestra un cuerpo de forma arbitraria que inicialmente se encuentra a una temperatura inicial T_i y que es sumergido en un recipiente de grandes dimensiones que se encuentra a una temperatura T_∞. Se satisface que $T_i > T_\infty$ de manera que el cuerpo estará sometido a un proceso de enfriamiento.



Análisis de Resistencia interna despreciable

La hipótesis más importante que se realiza en el análisis de Resistencia interna despreciable, es que se considera que la distribución de temperatura dentro del cuerpo es uniforme, de tal manera que la temperatura depende exclusivamente del tiempo, esta suposición en principio es aceptable bajo las siguientes condiciones:

- Cuerpo de dimensiones pequeñas
- Alta conductividad térmica del cuerpo
- Bajo coeficiente de transferencia de calor por convección.

El balance de la primera Ley de la Termodinámica establece:

$$-q_{sale} = \frac{dU}{dt}$$

$$q_{sale} = hA_s(T - T_\infty)$$

$$\frac{dU}{dt} = \rho VC\frac{dT}{dt}$$

De tal manera que sustituyendo, se tiene:

$$\rho VC\frac{dT}{dt} = -hA_s(T - T_\infty)$$

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{hA_s}{\rho VC}(T - T_\infty)$$

La ecuación anterior permite determinar la distribución de temperaturas, como la ecuación diferencial anterior es de primer orden se necesita imponer de una condición inicial, esta es:

$$T = T_i \quad , t = 0$$

incorporando las siguientes variables adimensionales

$$\theta^* = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty}$$

$$Bi_m = \frac{hLc}{k}; \; Lc = \frac{V}{As}$$

$$Fo_m = \frac{\alpha \cdot t}{Lc^2}$$

La longitud característica corresponde a la relación Volumen/ área superficial, del cuerpo y Bi_m y Fo_m corresponden al Número de Biot modificado y al Número de Fourier modificado respectivamente.

La ecuación y su correspondiente condición inicial se transforma ahora en:

$$\frac{d\theta^*}{dFo_m} = -Bi_m \theta^*$$

$$\theta^*(0) = 1$$

Cuya solución viene dada por:

$$\theta^* = \exp(-Bi_m Fo_m)$$

Interpretación Física del Número de Biot y del Número de Fourier.

Bi_m se denomina el Número de Biot, modificado el cual posee la siguiente interpretación física.

$$Bi_m = \frac{[\text{Resistencia por conducción}]}{[\text{Resistencia por convección}]}$$

$$Bi_m = \frac{\frac{Lc}{k}}{\frac{1}{h}}$$

De manera que, si

$Bi_m >> 1$ Implica que: resistencia por conducción domina.
$Bi_m << 1$ Implica que: resistencia por conducción es despreciable.
El Número de Fourier modificado es un tiempo adimensional.

En donde α , es la difusividad térmica del material, la cual es una propiedad térmica del sólido, que se define como:

$$\alpha = \frac{[\text{La energia que conduce}]}{\text{La energia que almacena}]} = \frac{k}{\rho C}$$

Determinación del calor total

Con frecuencia interesa calcular el flujo de calor total, el cual se define como:

$$Q = \int_o^t q dt$$

El calor anterior se puede determinar mediante un balance de primera ley entre el tiempo inicial y el tiempo final,
el cual establece que:

$$Q = mC (T_i - T)$$

que expresado en variable adimensionales, puede ser escrito como:

$$\frac{Q}{Q_\infty} = 1 - \exp(-\mathrm{Bi}_{\mathrm{m}} Fo_m)$$

donde

$$Q_\infty = mc (Ti - T_\infty)$$

Expresa el número de calor que puede ser transferido por el cuerpo, que se presenta cuando transcurre un tiempo lo suficientemente largo, $t \to \infty$, en donde se alcanza el equilibrio térmico y por tanto el cuerpo adquiere la temperatura del medio circundante.

En general se acepta que la teoría de la resistencia interna despreciable es válida siempre y cuando el número del Bi_m sea inferior a 0.1
Criterio para la aplicación del análisis de resistencia interna despreciable:

$$Bi_m < 0.1$$